分類と情報射のなす圏の exponential

酒井政裕

2003 年 9 月 19 日

分類と情報射のなす圏[1]に exponential が存在するならば、定義から

$$\begin{tikzcd}
C \times A \arrow[r, "\ulcorner f \urcorner \times I"] \arrow[dr, "f"'] & B^A \times A \arrow[d, "\mathrm{eval}"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

が可換になるはずであるので、この時トークンレベルでは

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{tok}(C) + \mathrm{tok}(A) & \mathrm{tok}(B^A) + \mathrm{tok}(A) \arrow[l, "\ulcorner f \urcorner^\vee + I"'] \\
& \mathrm{tok}(B) \arrow[ul, "f^\vee"] \arrow[u, "\mathrm{eval}^\vee"']
\end{tikzcd}$$

が可換になるはずである。

しかし、ある $b \in \mathrm{tok}(B)$ について

- $\mathrm{eval}^\vee(b) = \mathrm{in}_1(e)$ ならば、$\mathrm{f}^\vee(b) = \mathrm{in}_2(a)$ の時には上図は可換になり得ない。
- $\mathrm{eval}^\vee(b) = \mathrm{in}_2(a)$ ならば、$\mathrm{f}^\vee(b) = \mathrm{in}_1(c)$ の時には上図は可換になり得ない。

したがって、$\mathrm{eval}^\vee : \mathrm{tok}(B) \to \mathrm{tok}(B^A) + \mathrm{tok}(A)$ をどのように定義したとしても、すべての $f^\vee : \mathrm{tok}(B) \to \mathrm{tok}(C) + \mathrm{tok}(A)$ に対して同時に上図を可換にする事は出来ない。

ゆえに、この圏には exponential は存在しない。

[1] ここでは情報射の向きはタイプレベルの射の向きとするが、この圏は self-dual なので、どちらの向きを選んでも本質的な差はない。