アルゴリズム論レポート

酒井政裕 (学籍番号 70103970)

平成 14 年 6 月 6 日

[B]

王様探しのアルゴリズム (最小要素を探して左端要素と交換するという操作を反復して，小さい順にソートする方法) を，授業で扱った例にならって，数理的に解析してください．(ベストケイス，ワーストケイス，平均の算出)

1 王様探しのアルゴリズムについて

王様探しのアルゴリズムを C++風に書くと以下のようになる。以下では適宜このソースを参照する。

```
00: for (int i = 0; i < a.size - 1; i++){
01:     int k = i;
02:     for (int j = i + 1; j < a.size; j++){
03:         if (a[j] < a[k])
04:             k = j;
05:     }
06:     if (k != i)
07:         swap(a[k], a[i]);
08: }
```

2 比較回数

入力のサイズである a.size を N とすると、最初のループの回る回数は入力データ a の中身によらず $N-1$ 回である。また、内側のもう一つのループの実行回数は、外側のループが一回回るごとに $N-(i+1)$ 回である。したがって、3 行目の比較が行われる回数は、

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} 1 \\
= & \sum_{i=0}^{N-2} (N-(i+1)) \\
= & \sum_{i=0}^{N-2} (-i+(N-1)) \\
= & \sum_{i=0}^{N-2} (-i) \ + \ (N-1)(N-1) \\
= & -\frac{(N-1)(N-2)}{2} + (N-1)^2
\end{aligned}
$$

$$= \frac{N(N-1)}{2}$$

より、入力データの中身によらず $\frac{N(N-1)}{2}$ 回であり、オーダは $O(N^2)$ である。

3 swap 回数

3.1 ベストケース

ベストケースはソート済みのデータが与えられた時であり、そのときは明らかに 6 行目の条件 $k = i$ は常に成り立ち、swap 回数は 0。したがってオーダは $O(1)$

3.2 ワーストケース

最悪ケースは 6 行目の条件 $k = i$ が常に成り立たないようなデータが与えられた時であるので、swap 回数は外側のループが回る回数と同じ $N-1$ 回であり、オーダは $O(N)$

例えば、$\{5, 3, 1, 2, 4\}$ のような入力データがこのケースにあたる。

```
{5, 3, 1, 2, 4}
=> {1, 3, 5, 2, 4}
=> {1, 2, 5, 3, 4}
=> {1, 2, 3, 5, 4}
=> {1, 2, 3, 4, 5}
```

3.3 平均値

「コンピュータの数学」に載っているという母関数についての厳密な議論を読んでいないので、より素朴に考えることにする。

長さ N の入力をソートする場合、ある i に関して swap を実行しなくて良いのは、$\{a[x] \mid i \leq x < N\}$ の中で $a[i]$ が最小であった場合に限られる。その確率は $\frac{1}{N-i}$ であると考えられるので swap 回数の期待値は

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N-2}(1 - \frac{1}{N-i}) \\
&= \sum_{i=0}^{N-2} 1 - \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{N-i} \\
&= (N-1) - (\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) \\
&= (N-1) - (\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1}) \\
&= (N-1) - (H(N) - 1) \\
&= N - H(N)
\end{aligned}$$

となる。(ただし、H は調和関数とする)

したがって、平均値は $N - H(N)$ であると考えられる。