Elementary universal mapping properties

酒井政裕

2002 年 6 月 14 日

1 Terminal object

集合の圏では、1 要素からなるオブジェクトへは任意のオブジェクト X からの射 (=写像) がユニークに存在したが、多くの他の圏でも同じ性質を持つオブジェクトが存在する。

定義 1 圏 C のオブジェクト S は、C の各オブジェクト X について C の射 $X \to S$ が**ただ一つ**存在するとき、**terminal object** であるという。

このような定義は、その圏の全てのオブジェクト X との関係を使って、あるオブジェクト S の性質を述べているので、しばしば Universal Mapping Property と呼ばれる。

命題 1 *(Uniqueness of Terminal Objects)* S_1,S_2 が共に C の *terminal object* であるならば、C の射 $S_1 \to S_2$ がただ一つ存在し、*isomorphism* である。

証明 S_2 が terminal object であることより、$S_1 \to S_2$ がユニークに存在する。同様に、S_1 が terminal object であることより、$S_2 \to S_1$ がユニークに存在する。

これらを結合することで、endomorphism $S_1 \to S_2 \to S_1$ と $S_2 \to S_1 \to S_2$ が得られる。

terminal object の定義より、自分自身からの射はただ一つしか存在しないはずで、またどんなオブジェクトも自分自身への恒等射を持っているので、これは恒等射である。

したがって、$S_1 \to S_2$ と $S_2 \to S_1$ は互いに inverse であり、*isomorphism*

terminal object が全て同型 (isomorphic) であることが言えたので、これからは通常それらを区別せずに $\mathbf{1}$ と書く。

terminal objects の定義は単純だが、terminal object 自体は全く trivial というわけではない。実際、codomain が terminal object であるような射 $X \to \mathbf{1}$ の数えあげは (常に 1 個なので)trivial だと考えられるが、domain が terminal object であるような射 $\mathbf{1} \to X$ の数えあげは X についての特有の情報をもたらす。

定義 2 $\mathbf{1}$ が圏 C の *terminal object* であり、X が C のオブジェクトであるととき、C の射 $\mathbf{1} \to X$ は X の **point** と呼ばれる。

Exercise 1 *$\mathbf{1}$ has one point. If $X \xrightarrow{f} Y$ and x is a point of X then fx is a point of Y.*

Exercise 2 *In category of abstract sets, each point of X 'points to' exactly one element of X and every element of X is the value of exactly one point of X. (Here X is any given abstract set.)*

2 Initial object

圏における、多くのオブジェクトや射の定義は、定義における射と結合の向きを反転させてやる (特に domain と codomian を入れ換える) ことで'dualize' する事が出来る。例えば、terminal object の dual(双対) の概念は以下のようになる。

定義 3 圏 C のどのオブジェクト X に対しても、射 $S \to X$ がただ一つだけ存在するようなオブジェクト S を **initial object** と呼ぶ。

集合の圏では、空集合が initial object になる。

Exercise 3 圏 C で S_1 と S_2 が共に *initial* であるならば、*(ユニークな)* 射 $S_1 \to S_2$ は *isomorphism* である。

証明 (terminal object の場合とほぼ同じなので省略)

initial object が全て同型である事が言えたので、これからは通常それらを区別せずに **0** と書く。

3 Products

C のオブジェクト B_1,B_2 と、C の射 $P \xrightarrow{p_1} B_1$, $P \xrightarrow{p_2} B_2$ が与えられたとする。当然、$X \xrightarrow{f} P$ は新しい合成射 $X \xrightarrow{p_1 f} B_1$, $X \xrightarrow{p_2 f} B_2$ を導く。しかし、P, p_1, p_2 を適切に選ぶことで、この逆も可能になる。

定義 4 *An object P together with a pair of maps $P \xrightarrow{p_1} B_1$, $P \xrightarrow{p_2} B_2$ is called* **product** *of B_1 and B_2 if for each object X and each pair of maps $X \xrightarrow{f_1} B_1$, $X \xrightarrow{f_2} B_2$, there is exactry one map $X \xrightarrow{f} P$ for which both $f_1 = p_1 f$ and $f_2 = p_2 f$.*

$$\begin{tikzcd}
& & B_1 \\
X \arrow[urr, "f_1"] \arrow[r, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[drr, "f_2"'] & P \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
& & B_2
\end{tikzcd}$$

This map f, since it is uniquely determined by f_1 and f_2, can be denoted by $\langle f_1, f_2 \rangle$. The maps p_1 and p_2 are called projection maps for the product.

Exercise 4 *If P,p_1,p_2 and also Q,q_1,q_2 are both products of the same pair of objects B_1, B_2 in a given category, then the unique map*

$$P \xrightarrow{f} Q$$

for which $p_1 = q_1 f$ and $p_2 = q_2 f$ is an isomorphism

証明　P が product であることより定まるユニークな射を

$$Q \xrightarrow{g} P$$

とする。

Q が product であることより、

$$\begin{cases} q_1 f = p_1 \\ q_2 f = p_2 \end{cases}$$

P が product であることより、

$$\begin{cases} p_1 g = q_1 \\ p_2 g = q_2 \end{cases}$$

代入して

$$\begin{cases} p_1 g f = p_1 \\ p_2 g f = p_2 \end{cases}$$

したがって、下図が可換になる。

$$\begin{tikzcd}
 & & B_1 \\
P \arrow[urr, "p_1 gf = p_1"] \arrow[r, "gf"] \arrow[drr, "p_2 gf = p_2"'] & P \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
 & & B_1
\end{tikzcd}$$

ところで、下図も可換であるので、ここから $gf = \langle p_1 gf, p_2 gf \rangle = \langle p_1, p_2 \rangle = 1_P$ が言える。

$$\begin{tikzcd}
 & & B_1 \\
P \arrow[urr, "p_1"] \arrow[r, "1_P"] \arrow[drr, "p_2"'] & P \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
 & & B_2
\end{tikzcd}$$

同様にして、$fg = 1_Q$ が言え、f と g は互いに inverse であり、ゆえに f は isomorphism である。

B_1 と B_2 の product が全て同型であることが言えたので、これからは通常それらを区別せずに $B_1 \times B_2$ と書く

Exercise 5 *In a category C with products and a terminal object, each point of $B_1 \times B_2$ is uniquely of the form $\langle b_1, b_2 \rangle$, where b_i is a point of B_i (i = 1,2); and any pair of points of B_1,B_2 are the projectoins of exactly one point of $B_1 \times B_2$.*

T を「時間」に相当するオブジェクトとすると、射 $T \to X$ は「motion in X」と呼ばれる。そして、P が P を product にするような B_1 と B_2 への projection と共に定義されているとき、motion in P は 2 つの factor での motion とユニークに対応する。

$$\frac{T \to B_1 \times B_2}{T \to B_1, T \to B_2}$$

参考文献

[1] F. William Lawvere, Stephen H. Schanuel “Conceptual Mathematics - A first introduction to categories”